

大家來「寫」數學 由數學日記談另類評量

臺北縣昌平國小 馬恬舒

一、小「數」兒誕生

2004年七月的酷暑，幾位滿懷抱負的教師，懷著興奮與期待的心情踏進國家教育研究院籌備處，參加為期兩個禮拜的數學領域深耕種子研習，習得了多元評量的理論與實務，汲取實作評量、複式評量與寫作評量的精華，體驗數學步道之規劃，分組實作二階段評量，以及動態評量、QUASAR等聞所未聞的評量，二個星期以來，腦袋接收到一波又一波的衝擊—原來這也是評量！從此，一顆顆小小的「數」兒種子誕生，散播「另類評量」的任務便悄悄開始了。

二、小「數」發芽

返回教學現場，最先嘗試的是二階段評量，內容為探討國小四到六年級學童在「二分之一」與「四分之二」的等價概念中，各種錯誤概念形成的原因（相關多元評量的資料可至 Math Seed 網站查詢：<http://mathseed.ntue.edu.tw/main.htm>）。之後也陸續帶領同年級教師及家長進行數學實作評量、設計數學園遊會闖關評量、推廣 QUASAR 評量中部分給分之理念，並和數學領域教師共同設計規劃校園數學步道等，讓學生實際體驗校園中的數學，激發兒童解題的意願、促進同儕及師生間的互動。每每看到孩童在解題過程的認真神情，以及解題成功的欣喜笑臉，為師者滿足之情躍然於紙上。

這樣的評量方式，和傳統的統一命題紙筆測驗、只重視評量成績的理念是截然不同的，評量最重要的精神，在於兒童如何學習數學（鄔瑞香，1997），評量的目的，在於適當地描述學生的學習狀況（黃敏晃，2000）。然而，為了解學童的學習歷程，每次都需大費周張的設計評量，並與同學年教師溝通、協調、討論與修正，再徵求熱心的家長協助參與，幾次的活動結束後，雖滿懷成就感，但對以包班制為主的國小導師而言，無疑是一種甜蜜的負荷。

在推行另類評量的同時，筆者也在當時任教的班上實施「數學日記」，和其他的另類評量一樣，利用數學日記亦能觀察學生的學習歷程，不同的是數學日記使用的隨機性及廣泛性，可以在一個單元、一堂課，甚或是討論完一個數學概念後，讓學生反思自己的解題策略、批判上課所見所聞的內容、提出自己的學習心得看法，或疑惑待探究的問題（鄔瑞香，1997）。

三、小「數」茁壯

數學日記基本上是一種「歷程檔案評量」，或稱為「卷宗評量」（Portfolio Assessment），可用來檢驗學童在課堂的學習，以及概念的理解和應用，透過學生展現的數學日記內容，教師可以從中找出教學盲點，進而達到反省教學之效。換句話說，對學生而言，撰寫數學日記是進行數學溝通以促進概念理解的一種活動；以及培養學生形成批判性思考能力、反思能力、及欣賞數學的一種學習工具。對教師而言，雖然學生面對相同的題材，但因個人對情境理解的不同，而發展出不同層次的解題策略（Marja，2000），因此，利用數學日記記錄學生的學習軌跡，可促進教師與學生的教學溝通，落實以學習者為中心的教學，並提昇教師高層次思考的命題能力。

因此可知，數學日記的目的，是評量學生對數學概念的理解程度，而非單純的計算或解題；而寫數學日記的良機，則是在討論一個重要的數學概念之後，學童進行反思、抒發學習心得或延伸學習。

因此，在數學日記的題型設計上，除了著重學童的解題策略及歷程之外，更重要的是提昇至後設認知層次。

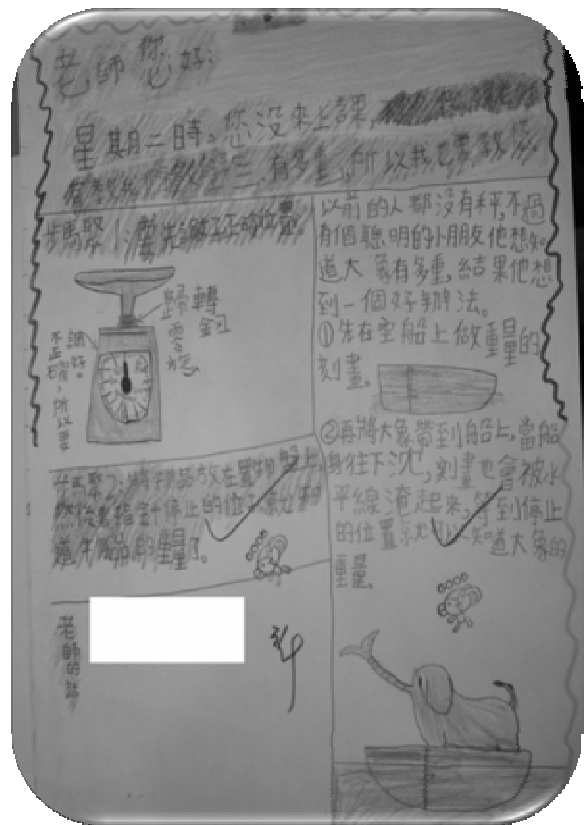
以下就以學童的數學日記做為案例說明實施的方式。

(一) 配合教學活動出題

初接觸到數學日記的老師，往往感到茫然，不知如何下手，這時不妨從當天的教學活動起始，若是在新單元的引入，數學日記的命題就含有檢驗、澄清概念的目的。由於筆者身兼輔導團員，常需要請公假至校外和其他教師進行資源的交流及分享，或者偶有班上學生請假未到校的情況，此時的數學日記命題可以是：「寫一封信告訴○○同學，解釋 3×5 和 5×3 答案為什麼相同？」或更開放性的「寫一封信告訴老師今天上數學課的情形」，寫信的對象當然也可以是比自己年幼的學弟妹，依據收信者的身分不同，考驗學生課堂的觀察統整及數學連結的能力。如下圖一、二，筆者公假外出，請代課老師上課，當日的數學日記題目即為「請你寫一封信給恬舒老師，告訴她今天數學課的上課內容。」下列圖一，一位孩子拿出漂亮的信紙，一字一句從問候、內文到祝福語，規規矩矩的寫出上課內容，從她的述敘中可以發現，那位代課老師著重的教學內容在於器材使用的知識，請看那最後一句「老師上課有拿真的，的秤給全班看」，雖有些許的錯誤文字，但無損於教師對解題者運思的理解，以及窺見代課教師「自己操作，學生觀看」的上課景象。圖二的孩子更可愛，不但呈現出器材使用前需歸零的概念，以及如何看秤面得知物品重量的方式，有趣的是，她還展現延伸學習的精神，查詢古人秤大象的方式，並且不怕麻煩的塗上亮麗的色彩，收到這樣的信件（評量試卷），怎能不高興呢？



圖一

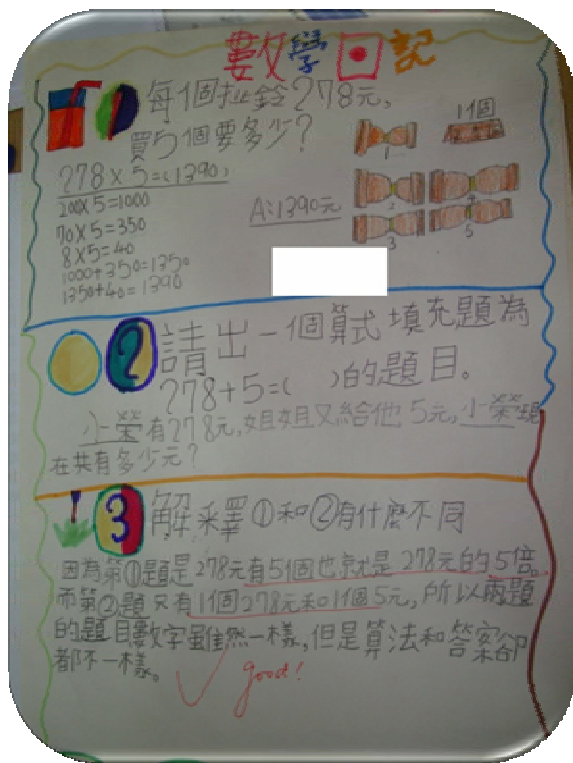


圖二

(二) 解題、擬題

欲進行乘法活動，要先建立「倍」的概念，為檢驗孩子是否鑽入概念的死角，數學日記的擬題活動可成為敲門磚，因為對問題結構的了解與能否成功解題息息相關，擬題能讓學生更加了解問題的結構（劉祥通，2000）。本範例含三個小題，由解乘法問題開始，意在觀察學生是否能澄清問題、了解題意，及使用何種解題策略和解題過程；再利用相同的數字「278 和 5」請學生擬出一題算式為加法的題目（ $278+5$ ），最後，讓孩童解釋第一題的算式和第二題的算式有何意涵上的不同，如圖三、圖四。筆者先利用當時三年級學生的生活情境布題「每個扯鈴 278 元，買 5 個要多少錢？」，圖三的孩子寫出「 $200 \times 5 = 1000$ ， $70 \times 5 = 350$ ， $8 \times 5 = 40$ ， $1000 + 350 = 1350$ ， $1350 + 40 = 1390$ 」，而圖四的孩子寫出「 $278 + 278 = 556$ ， $556 + 278 = 834$ ， $834 + 278 = 1011$ ， $1011 + 278 = 1390$ 」，乍看之下，圖三的孩子已能利用數字的拆解策略解決乘法問題，而圖四的孩子尚停留在連加，但繼續往下看才發現，第一題以連加的概念做乘法，原來是要和第二小題的加法做比較，由此可以看出孩童的運思過程及不同的呈現能力。

再看看孩子所擬的問題：「小榮有 278 元，姐姐又給他 5 元，小榮現在共有多少元？」「停車場裡停了 278 輛汽車，後來又來了 5 輛汽車，停車場裡有幾輛汽車？」二者所呈現的都是添加型的問題，在檢視其他學生的作業後，發現班上大部分孩子所擬的問題不是併加型就是添加型問題，缺少了比較型的加法，於是檢討自己教學時的布題，是否都偏重於併加及添加，並在之後的教學作改進。



圖三



圖四

(三) 批判性思考

在數學日記實施的過程中，可運用孩子天生熱情的個性培養批判性的思考，例如，修補同儕不完整或不合理的解題思考，或批判他人解題的合理性（圖五、圖六、圖七）。分數除以分數且有餘數的題型為國小高年級學生的一大數學難題，除了典型的迷思概念之外，尚有形形色色的錯誤概念，教師不妨將這些解題列出，讓學童擔任救火隊或醫生的工作，圖五～圖七為筆者由學生前次數學日記的批閱中，選出數個具代表性的錯誤解題類型，再請學童依據自己的數學概念理解程度進行批判及修補，此類型的出題方式類似複式評量（Composite Assessment）的概念，透過檢視及修改他人解題過程，重新審視及建構自己的構念，因此，學生不止在接受評量，同時也在進行學習（曹博盛，2004）

① $10 \div 2\frac{1}{4}$
 $= 10 \times \frac{4}{9}$
 $= \frac{10}{1} \times \frac{4}{9}$
 $= \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$

① $\frac{4}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{9}$
 ↓
 看錯
 A: ① 4段
 ② $\frac{1}{9}$ 公尺

圖五

② $10 \div 2\frac{1}{4} = 5\frac{1}{40}$

① $\frac{4}{9} \times 2\frac{1}{4} = \frac{1}{9}$
 $= \frac{14}{9} \times \frac{1}{4} = 1$

A: $5\frac{1}{40}$ 段, 1公尺

圖六

③ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

④ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

⑤ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

⑥ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

⑦ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

⑧ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

⑨ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

⑩ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

⑪ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

⑫ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

⑬ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

⑭ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

⑮ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

⑯ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

⑰ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

⑱ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

⑲ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

⑳ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㉑ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㉒ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㉓ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㉔ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㉕ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㉖ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㉗ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㉘ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㉙ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㉚ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㉛ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㉜ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㉝ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㉞ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㉟ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㊱ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㊲ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㊳ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㊴ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㊵ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㊶ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㊷ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㊸ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㊹ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㊺ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㊻ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㊼ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㊽ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㊾ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

㊿ $10 \div 2\frac{1}{4} = 10 \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$

① $= 10 \times \frac{4}{9}$ (計算錯誤(分子不能約分子))
 ② $= \frac{40}{9}$
 ③ $= 4\frac{4}{9}$
 ④ $= \frac{4}{9} \times 2\frac{1}{4}$ (計算+思考錯誤)應該要用乘的
 ⑤ $= \frac{14}{9} \times \frac{1}{4}$
 ⑥ $= 1$
 ⑦ $= 4$ 段
 ⑧ $= 1$ 公尺

圖七

數學日記發展至此，小小「數」兒在悉心的照顧之下，已漸漸長成健壯的小「數」，然而，良好的命題設計固然是小「數」成長的沃土，維持孩童的學習動力更是茁壯所不可或缺的肥料。

如何激發兒童撰寫數學日記的意願？親、師、生三者缺一不可，教師及家長的愛與鼓勵、支持與肯定，以及孩子的自我成長、享受成就，成為循環不已的學習動力（鄔瑞香，1997）。教師無疑是推動數學日記的導演，但光是擁有好的劇本仍無法讓我們滿足，導演執導的能力才是重要的關鍵，亦即除了高層次思考的命題能力之外，教師還必須慧眼獨具，不斷地釐清在數學日記中看到了什麼，並歸類分析學童的解題類型，以了解其思考過程，行反思教學之效。而從家長參與的角度來看，以往學生解題遇到瓶頸時，常需依賴家長的協助，但數學日記的命題乃是依據當日教學內容所提出的反思活動，

家長未參與教學歷程，故無法介入，便逐漸退出數學日記的作業，轉而扮演支持的角色，間接鼓勵了小朋友學習上的獨立。而學生身為學習的主體，在探究的過程獲得解題的成就感，以及作業展示觀摩、同儕互評等激勵，逐漸成爲一個主動的學習者，如此一來，親、師、生三贏，這是我們所樂見的。

四、小「數」開花結果

透過評量活動，教師得以了解預期的教學目標是否達成，並診斷學生的學習困難及分析教學成效，傳統的紙筆測驗簡便易行，已成爲評量學習成就的主要工具，但也因爲沿襲已久，常因其流弊而爲人所垢病，如：偏重測量低層次的記憶性知識，而忽略高層次的認知能力；偏重學習結果，而忽略對學習過程之了解（簡茂發，2002）。但在九年一貫的課程實施後，更加強調教學評量不宜侷限於同一種方式，也就是說，九年一貫的課程目標必須採用多元化的評量來達成，透過教師的實踐歷程，以免除單一評量所帶來的問題（李坤崇，1999）。

必須強調的是，評量需與教學密切結合，無論在教學實施的各個階段，爲了掌握學生的學習狀況，教師都必須清楚教學脈絡，並運用適當的評量策略，以收「多元」之效；利用數學日記來進行評量，學習的過程及結果皆可完整呈現，不但能使學生了解自己的解題策略、思考方法，更能使教師充分掌握學生學習的資訊，達到反思教學之效。

在現今多元化的社會，學生學習的方法亦趨多元，如何選用適當的評量方法以了解學生的需求、作出正確的教學決策，卻是亙古不變的教學目標。我想，這也就是推展另類評量的重要目的，期盼透過另類評量的實施，我們能打開孩童腦中數學學習的黑盒子，讓「教師教得有感覺，學生學得有意義」（張英傑與周菊美，2005）！

參考文獻

- 李坤崇（1999）。**多元化教學評量**。臺北：心理。
- 曹博盛（2004）。複式評量。載於**第 1390 期九年一貫課程教學深耕種子教師研習資料～數學學習領域**（頁 78-82）。臺北：國立教育研究院籌備處。
- 黃敏晃（2000）。國小數學新課程下評量改革的一些想法。載於教育部臺灣省國民學校教師研習會（主編），**國民小學數學科新課程概說（中年級）～協助兒童認知發展的數學課程**（頁 240-253）。臺北：教育部臺灣省國民教師研習會。
- 鄔瑞香（1997）。從一年級兒裡數學日記看評量。載於教育部臺灣省國民學校教師研習會（主編），**國民小學數學新課程學習評量方法初探**（頁 66-82）。臺北：教育部臺灣省國民教師研習會。
- 劉祥通（2000）。數學寫作教學策略初探。載於教育部臺灣省國民學校教師研習會（主編），**國民小學數學科新課程概說（中年級）～協助兒童認知發展的數學課程**（頁 224-239）。臺北：教育部臺灣省國民教師研習會。
- 簡茂發（2002）。多元化評量之理念與方法。**教育資料與研究**，46，1-7。
- Van de Walle, J. A.（2005）。Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally（**中小學數學科教材教法**）。張英傑、周菊美合譯。臺北：五南。（原著 2001/2004 年出版）
- Van den Heuvel-Panhuizen, M.（2000）。Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9*. Utrecht: Utrecht University.